21/03/2019

Μάθημα 7ο

Δυναμική

Νόμοι της Κ.Μ.

1) Νόμος Αδράνειας, $\bar{p} = m \cdot \bar{v}$ (ποσότητα κίνησης ή ορμή)

2) Μεταβολή της Ορμής, 2ος Ν.Ν., $\frac{d\bar{p}}{dt} = \Sigma \bar{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \Sigma \bar{F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\frac{d\bar{v}}{dt} = \Sigma \bar{F} \Rightarrow \boxed{m\frac{d^2 r}{dt^2} = \Sigma \bar{F}}$$ με κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Π.Α.Τ. Δ.Ε ⊕ αρχική τιμή → ~~γενική~~ λύση, → μερική λύση

π.χ. $\bar{r} = 0$, $\bar{v} = a$, $a > 0$

Π.Σ.Τ. Δ.Ε. ⊕ Συνοριακές Συνθηκών

π.χ. $\bar{r}(0) = 0$ και $\bar{v}(100s) = 0$

3) Νόμος Δράσης - Αντίδρασης

$m_1 \rightarrow \leftarrow m_2$

$f_{12} = -f_{21}$

4) Ανεξαρτησία Δυνάμεων

Χώρος	Χρόνος
$D \subseteq \mathbb{R}^3$	Ομογενής $[0, +\infty)$
Ευκλείδιος (Για να ορίσουμε την ευκλείδια [illegible])	απόλυτος: δεν εξαρτάται από τον χώρο
Ομογενής	
Συνεχής	

Παράδειγμα.

Έστω Υ.Σ. μάζας m, κινείται στο xy-επίπεδο με τροχιά

$C: \bar{r}(t) = (a\cos\omega t)\bar{i} + (b\sin\omega t)\bar{j}$, $a > b > 0$, $\omega > 0$

1) Ν.Δ.Ο. το υλικό σημείο κινείται σε έλλειψη

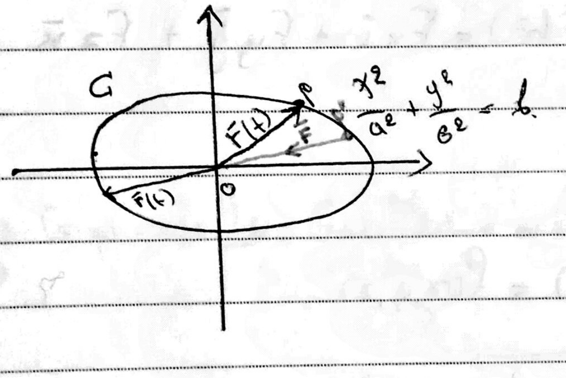
2) Η δύναμη που ασκείται στο Υ.Σ. έχει κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.

Απάντηση.

① Είμαστε στο επίπεδο xy. Η $r(t)$ περιγράφει μια λεία. Καμπύλη c μονοπαραμετρική ως προς τον χρόνο t.

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = b\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x/a = \cos(\omega t) \\ y/b = \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2/a^2 = \cos^2(\omega t) \\ y^2/b^2 = \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



② $2^{ος}$ Ν.Ν: $m \cdot \bar{a} = \Sigma \bar{F} \Rightarrow m \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \bar{F} \Rightarrow m \frac{d}{dt}\left(-\omega a\sin\omega t\,\bar{i} + \omega b\cos\omega t\,\bar{j}\right) = \bar{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(-\omega^2 a\cos\omega t\,\bar{i} - \omega^2 b\sin\omega t\,\bar{j}\right) = \bar{F} \Rightarrow -\omega^2 m\bar{r} = \bar{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{F} = -m\bar{r}\omega^2 \Rightarrow \boxed{\bar{F} = -m\omega^2\bar{r}}$$

Βαρυτική δύναμη

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

M_1 ... M_2 όπου $\bar{r}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$

$$\bar{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \cdot \bar{r}_0$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ $Nt \cdot m^2/Kg^2$

Βάρος ενός σώματος πάνω στην επιφάνεια της Γης:

$$\bar{B} = -\underbrace{\left(G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}\right)}_{=g} m\bar{r}_0 \Rightarrow \boxed{\bar{B} = -mg\bar{r}_0}$$

Διανυσματικά Πεδία

Είναι μια διανυσματική συνάρτηση, $\bar{F}(\bar{r}) = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$

$\bar{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Βαθμωτά Πεδία (→ Μπορώ να ορίσω κλίση ή βάθμωση του πεδίου)

Είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, $f(\bar{r}) = f(x,y,z)$

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

κλίση → $\text{grad} f = \bar{\nabla} \cdot f = \left(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z\right)$ Διάνυσμα

μεταβολή της βαθμωτής συνάρτησης

Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς

Είναι ένα σύστημα αναφοράς που ή είναι ακίνητο ή κινείται με ομαλή ταχύτητα. Σε τέτοια συστήματα ισχύουν οι Ν.Ν.

Εξισώσεις κίνησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

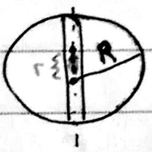
$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \Sigma\bar{F} = \bar{F} = \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_x(\ldots) \\ m\ddot{y} = F_y(\ldots) \\ m\ddot{z} = F_z(\ldots) \end{cases}$$

Χρειάζομαι αρχικές συνθήκες $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$ (στο $t=0$)

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 6 σταθερές ολοκλήρωσης. Άρα 6 αρχικές συνθήκες για την επίλυση των ΣΔΕ.

Απύθμενο Πηγάδι (Bottomless pitt)



Θεωρούμε τη Γη ομογενή σφαίρα σταθερής πυκνότητας

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

Άρα, στη θέση r η μάζα $M_r = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$

Από 2ο Ν.Ν.: $m\ddot{r} = m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r m}{r^2} = -\frac{G\rho\frac{4\pi}{3}r^3}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\left(\frac{\rho G 4\pi}{3}\right) r \Rightarrow \boxed{\ddot{r} + \left(\frac{4\pi}{3}\rho G\right) r = 0}$$

$$\frac{4\pi}{3}G\rho = \frac{4\pi}{3}G\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{GM}{R^3} \Rightarrow \ddot{r} + \underbrace{\left(\frac{GM}{R^3}\right)}_{\omega^2} r \Rightarrow \boxed{\ddot{r} + \omega^2 r = 0}$$

ΣΔΕ, 2ης τάξης, 1ου βαθμού, γραμμ. ομογενής

2ης τάξης σταθερών συντελεστών

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} = \frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

Υποθέτω ότι η ΔΕ έχει λύση της μορφής:

$$r(t) = e^{at}$$

Άρα: $\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \Rightarrow a^2 e^{at} + \omega^2 e^{at} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{at}(a^2+\omega^2) = 0 \Rightarrow a^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a^2 = -\omega^2} \Rightarrow a = \pm i\omega$

Μιγαδικές λύσεις $\Rightarrow$ Άρα κυκλικές κινήσεις γενικά (sint, cost)

$$\boxed{r(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

Περίοδος $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Σπίτι ως παράδειγμα εφαρμογής

$$\left\{\begin{array}{l} M \cong 6 \cdot 10^{24}\ kg \\ R \cong 6.4 \cdot 10^{6}\ m \end{array}\right\} \text{Περίοδος } T = ; \quad \Rightarrow T = 1.5\ hrs$$

! Η εξίσωση $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$ είναι ο απλός αρμονικός ταλαντωτής !

Πως καταλαβαίνω ότι κάνω ταλάντωση

Από Euler $\rightarrow$ $\cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

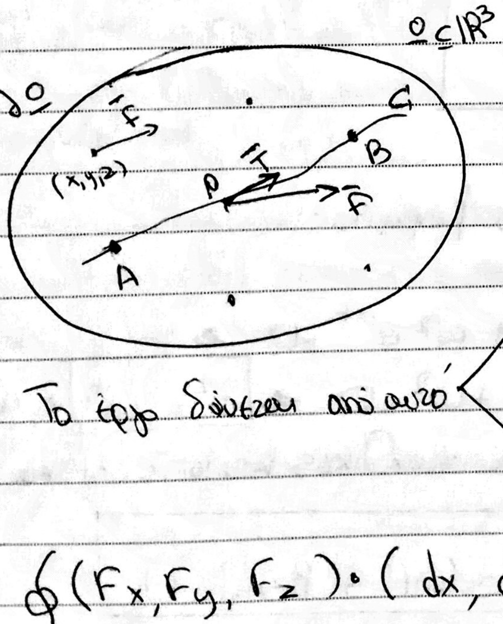
Μιγαδικός ρίζες $\rightarrow$ Ταλάντωση

Έργο Δύναμης

Ορισμός: Το έργο, W, που παράγεται ή καταναλώνεται από μια δύναμη $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$ πάνω σε μια λεία καμπύλη $\underbrace{C : \bar{r}(t)}_{\text{μονοπαραμετρικά}}$, για το χρονικό διάστημα t, $a \leq t \leq b$, είναι :

$$\boxed{W = \oint_C \bar{F} \cdot \bar{T}\, ds = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}}$$

Κινούμαι πάνω σε μια καμπύλη $\rightarrow$ αυτό με ενδιαφέρει.



Το μέτρο της κίνησης στην κατεύθυνση της δύναμης

Επιδρά πάνω μου μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης κατά την κίνηση του σώματος πάνω στην τροχιά

Το έργο δίνεται από αυτό

$$W = \oint_C (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \oint_C F_x dx + \oint_C F_y dy + \oint_C F_z dz$$

• $1^{ος}$ τρόπος επίλυσης:

x, y, z τα εκφράζω παραμετρικά ως προς t και λύνω ένα απλό ολοκλήρωμα Riemann με μία παράμετρο μόνο το t

• $2^{ος}$ τρόπος επίλυσης:

x, y, z συναρτήσει του x και το C συναρτήσει του x και το λύνω ως απλό ολοκλήρωμα (ή ως προς x ή ως προς y ή ως προς z)

$$W = \oint_C \bar{F}\cdot\bar{T}\,ds = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C \bar{F}\cdot \underbrace{\frac{d\bar{r}}{dt}}_{=\bar{v}}\,dt = \oint_C \bar{F}\cdot\bar{v}\,dt$$

$$\oint_C \bar{F}\,d\bar{r} = \oint_C (M,N,P)\cdot(dx,dy,dz) = \oint_C M\,dx + N\,dy + P\,dz =$$

$$= \oint_C (M\dot{x} + N\dot{y} + P\dot{z})\,dt$$

Παράδειγμα: Βρείτε το έργο, W, της $\bar{F} = (y-x^2)\bar{i} + (z-y^2)\bar{j} + (x-z^2)\bar{k}$ επί της C: $\bar{r}(t) = \underbrace{t}_{x}\bar{i} + \underbrace{t^2}_{y}\bar{j} + \underbrace{t^3}_{z}\bar{k}$ από το $A(0,0,0)$ στο $B(1,1,1)$

Απάντηση: $W = \oint_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r} = ?$

όμως: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, τότε: $\bar{F} = (t^2-t^2)\bar{i} + (t^3-t^4)\bar{j} + (t-t^6)\bar{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{F} = (t^3-t^4) + (t-t^6)\bar{k}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}$$

$$W = \oint_{\substack{C \\ A\to B}} \bar{F}\cdot\bar{v}\,dt = \oint_C \left[(t^3-t^4)\bar{j} + (t-t^6)\bar{k}\right]\cdot\left[\bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}\right] dt =$$

$$= \oint_C \left[2t(t^3-t^4) + 3t^2(t-t^6)\right] dt = \int_{t_0=0}^{t_1=1} \left(-3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^3\right) dt =$$

$$= \dots = 29/60 \text{ Joule}$$

$$W = F\cdot S = 1 \text{ Joule} = 1\,Nt \cdot 1m$$

<u>Ορισμός:</u> Στην ειδική περίπτωση που το έργο, W, είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που ακολουθούμε αλλά εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση, τότε η δύναμη λέγεται <u>συντηρητική ή διατηρητική</u>.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\bar{F}$ πεδίο ορισμένο σ' ένα ανοιχτό χωρίο, Ω, και A, B δύο τυχαία σημεία του Ω. Αν το έργο, W, είναι το ίδιο για όλες τις διαδρομές από το A στο B, το πεδίο καλείται συντηρητικό.

$$W = \oint_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε $\bar{F} = \bar{\nabla} f$ (πεδίο κλίσης)
όπου f είναι βαθμωτή διαφορίσιμη συνάρτηση που καλείται συνάρτηση δυναμικού του διανυσματικού πεδίου της $\bar{F}$ στο Ω.
Τότε, εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (*),

$$\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r} = f(B) - f(A)$$

(*) σύμφωνα με αυτό: $\int_A^B f\,dt = F(B) - F(A)$, f: συνεχής στο $[A,B]$ ή πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών

<u>Απόδειξη:</u> $\bar{F} = \bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}\right)\cdot\left(dx\, i + dy\, j + dz\, \bar{k}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

ολικό διαφορικό

$$W = \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

Θεώρημα: Για μια κλειστή διαδρομή, c_1, έχω ότι το επικαμπύλιο ολοκλ.,

$$\oint_{c_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0 \iff \bar{F} \text{ συντηρητικό.}$$